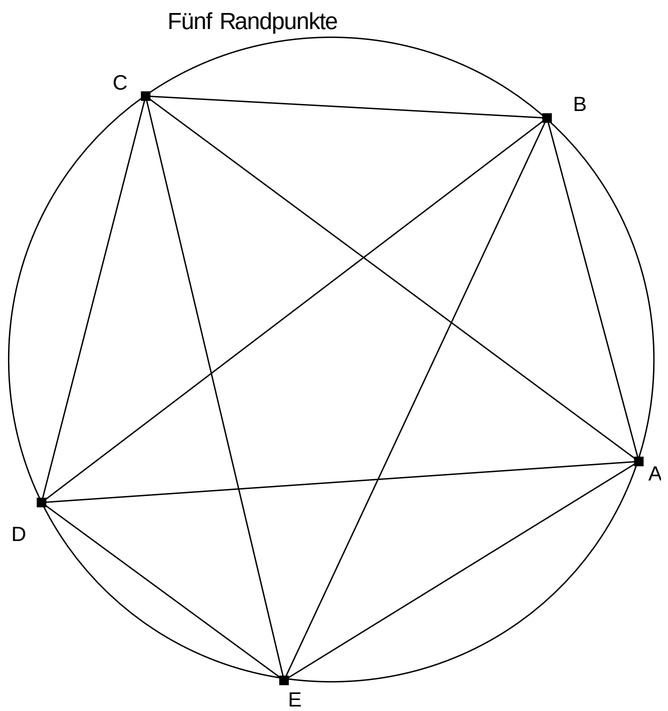
1. Aufgabe (Pfannkuchen):

a)
Je mehr Schnittpunkte unter den Geraden sind, umso mehr Teilflächen sind es. Bei 2 Schnitten sind es 3 Flächen, wenn die Geraden parallel verlaufen, 4 Flächen, wenn sie sich schneiden.

b)
Bei 3 Geraden gibt es 6 Teilflächen, wenn sich die geraden in einem gemeinsamen Schnittpunkt schneiden. Legt man die Geraden aber so, dass sie sich nicht alle drei in einem gemeinsamen Punkt schneiden, so entsteht ein zusätzliches Dreieck, das als Seiten die 3 Geraden hat, während die 6 Teilflächen bei einem gemeinsamen Schnittpunkt ja nur 2 Seiten und ein Stück des Randes haben.
Also ist die maximale Anzahl der Flächen 7.

c)
Durch Probieren erhält man maximal 10 Schnitte. (Einige Schüler sind sicherlich in der Lage, eine Lösungsformel zu entwickeln. Siehe Klasse 7/8)
Durch 10 Schnitte ergeben sich maximal 16 Gebiete. Dabei ist darauf zu achten, dass die Schnittpunkte im Inneren der Fläche von höchstens 2 Sehnen gebildet werden. Zieht man mehr Linien durch einen Punkt, verliert man Gebiete.



d)
Viele Schulen berechnen in Klasse fünf die Anzahl der Diagonalen in verschiedenartigen Vielecken. Daher ist dieser Ansatz sicherlich möglich.

$s_n = \frac{1}{2} \cdot \left[n(n-3) \right] + n$ (Die maximal mögliche Anzahl der Schnitte entspricht der Anzahl der Diagonalen plus der Anzahl der Seiten eines Siebenecks.)

$$s_n = \frac{1}{2} \cdot \left[n(n-3) \right] + n = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{1}{2}\left(n^2 - n\right) = \frac{1}{2} n (n-1)$$

Für sieben Randpunkte folgt daraus:

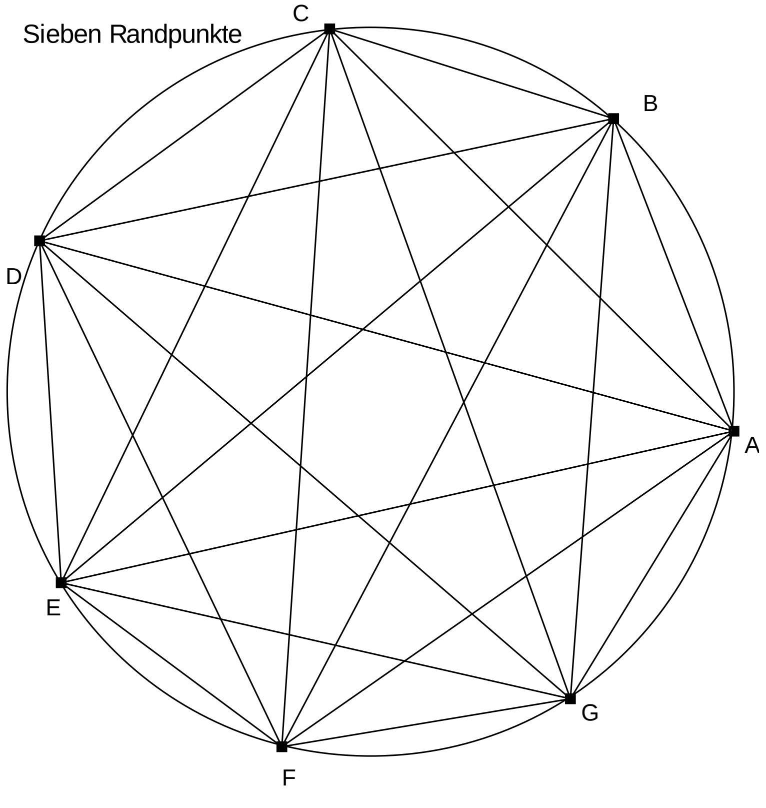
$$\frac{1}{2} n (n-1) = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$$

Es lassen sich 21 Schnitte ausführen.

Vielleicht wissen einige Schüler schon, dass auch
$\frac{1}{2} n (n-1) = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \binom{n}{2}$ entspricht.

Die Anzahl der Stücke (Gebiete) bei sieben Punkten beträgt 57.

Diese lassen sich durch Abzählen bestimmen.



e)
Man muss mindestens 6 Punkte markieren. Dabei dürfen sich höchsten zwei (2) Schnittlinien in einem Punkt (Innerer Punkt) treffen. Zieht man mehr Linien (Sehnen, Diagonalen) durch einen Punkt, verliert man Gebiete.

Die Lösung wird wahrscheinlich durch Abzählen erreicht.

Man wird in dieser Jahrgangsstufe nicht unbedingt erwarten können, dass die Schüler die Formel

$$Anzahl\ der\ Stücke = 1 + \binom{6}{2} + \binom{6}{4}$$

(Anzahl der Stücke = 1+ Anzahl der Sehnen + Anzahl der inneren Punkte) entwickeln und anwenden können.

f)
An jedem Sehnenschnittpunkt treffen sich zwei Sehnen. Diese haben vier Endpunkte.
Umgekehrt lässt sich formulieren, dass zu vier beliebigen Randpunkten genau ein Sehnenschnittpunkt (innerer Punkt) gehört, nämlich der Schnittpunkt der Diagonalen. Von diesen Punkten gibt es genauso viele, wie sich aus allen Punkten (n) vier Punkte bestimmen lassen.

Das sind genau $\binom{n}{4} = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$

Die Anzahl der Sehnenschnittpunkte kann man auch durch Abzählen erhalten. Mit zunehmender Anzahl von Eckpunkten wird das natürlich immer schwieriger.

Aufgabe 2 (Duschbad):

Sei x die Anzahl der Packungen „Blütenfruchtig“, y sei die Anzahl der Packungen „Blumig“.
Aufgrund der Herstellung von 100 Packungen des Duschbades „2013“ stehen folgende Mengeneinheiten der einzelnen Zutaten zur Verfügung:

$$\begin{array}{lcl} \text{Magnolia:} & 2500 - 5\cdot 100 & = & 2000 \text{ ME} \\ \text{Rose:} & 750 - 2\cdot 100 & = & 550 \text{ ME} \\ \text{Melone:} & 2900 - 5\cdot 100 & = & 2400 \text{ ME} \\ \text{Mango:} & 2900 - 2\cdot 100 & = & 2700 \text{ ME} \end{array}$$

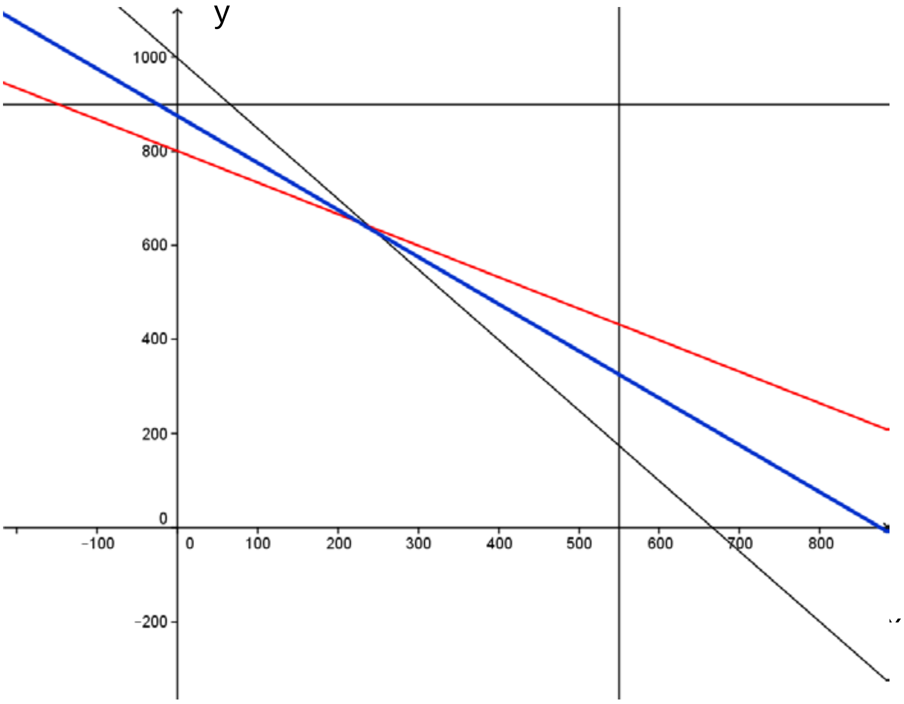
Damit ergeben sich folgende Bedingungsungleichungen:

$$\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 2y & \leq & 2000 \\ x & & & \leq & 550 \\ 2x & + & 3y & \leq & 2400 \\ & & 3y & \leq & 2700 \end{array}$$

Zu maximierender Gewinn: 5x + 5y = G.
Für eine zeichnerische Lösung formt man die vier Bedingungsungleichungen und die Maximierungsgleichung folgendermaßen um:

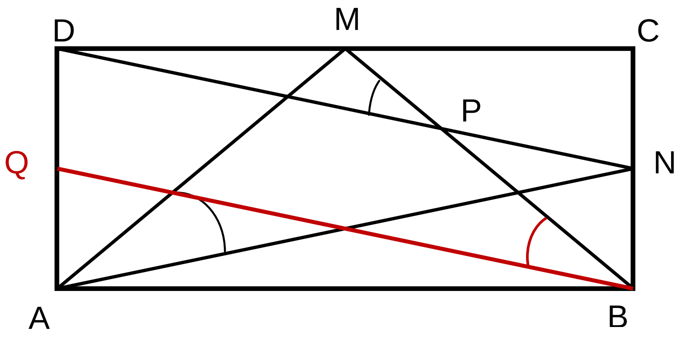
$$\begin{array}{lcl} y & \leq & 1000 - \frac{3}{2}x \\ x & \leq & 550 \\ y & \leq & 800 - \frac{2}{3}x \\ y & \leq & 900 \end{array}$$

$$y = -x + \frac{G}{5}.$$



Aus der graphischen Darstellung ergibt sich, dass der Eckpunkt der Fläche, in dem sich die Geraden $y = 1000 - \frac{3}{2}x$ und $y = 800 - \frac{2}{3}x$ schneiden, die optimale Mengenkombination darstellt. Beide Geraden schneiden sich bei x = 240 und y = 640. Der maximale Gewinn liegt dann bei $5 \cdot (240 + 640)\text{GE} = 4400\text{GE}$. Für den Gesamtgewinn folgt: $4400\text{GE} + 500 \cdot 8\text{GE} = 8400\text{GE}$
Der Gesamtgewinn beträgt 8400 GE.

Aufgabe 3 (Großvaters Garten):



Eine relativ einfache Lösung ergibt sich, wenn man in die Skizze den Hilfspunkt Q als Seitenmittelpunkt der Strecke $\overline{AD}$ einzeichnet. (Die neu eingezeichneten Stücke sind hier rot gezeichnet.)

Weil Q der Mittelpunkt von $\overline{AD}$ ist, gilt: $\overline{DN} \parallel \overline{QB}$. Aus Symmetriegründen gilt weiterhin:
$\sphericalangle(NAM) \cong \sphericalangle(MBQ)$. Die Gerade, die durch die Punkte B und M (g_{BM}) geht, schneidet die parallelen Geraden g_{BQ} und g_{ND} in den Punkten B und P. Es gilt:
$\sphericalangle(MPD) \cong \sphericalangle(MBQ)$, da die beiden Winkel Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen sind. Deshalb gilt auch:
$\sphericalangle(MPD) \cong \sphericalangle(NAM)$.
Es gilt unabhängig von der Größe des Rechtecks, dass die beiden Winkel kongruent sind.

Aufgabe 4 (Superschokohohlei)

Hierbei handelt es sich um unsere sog. Scherzaufgabe. Es gibt keine eindeutige Lösung. Die Bewertung erfolgt nach Kreativität im Lösungsansatz.

Hier nur einige mögliche Vorschläge:

Lisa gewinnt, wenn
u.a.
er das Ei im ersten Versuch zerschlägt
…

David gewinnt, wenn er
u.a.
das Ei mit seinem Taschenmesser mit drei Schnitten zerstört
…