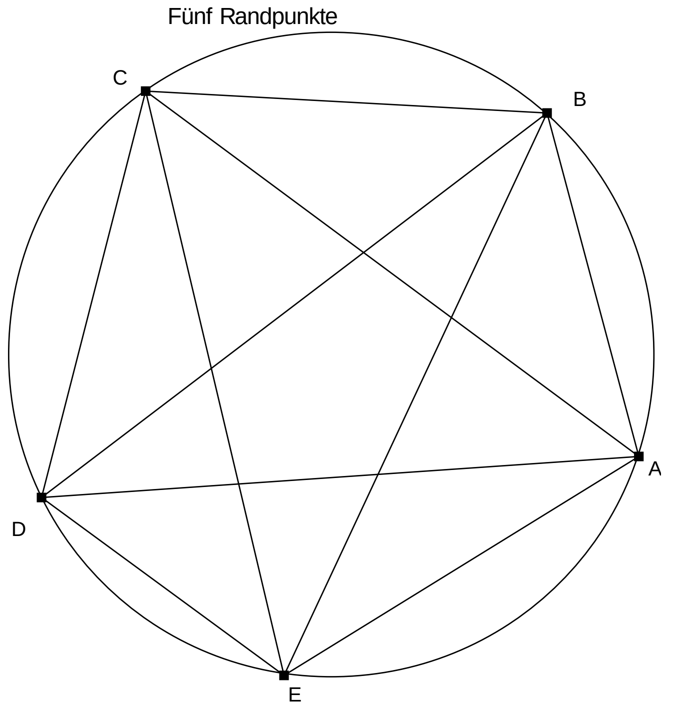
1. Aufgabe (Pfannkuchen):

a)
Je mehr Schnittpunkte unter den Geraden sind, umso mehr Teilflächen sind es. Bei 2 Schnitten sind es 3 Flächen, wenn die Geraden parallel verlaufen, 4 Flächen, wenn sie sich schneiden.

b)
Bei 3 Geraden gibt es 6 Teilflächen, wenn sich die geraden in einem gemeinsamen Schnittpunkt schneiden. Legt man die Geraden aber so, dass sie sich nicht alle drei in einem gemeinsamen Punkt schneiden, so entsteht ein zusätzliches Dreieck, das als Seiten die 3 Geraden hat, während die 6 Teilflächen bei einem gemeinsamen Schnittpunkt ja nur 2 Seiten und ein Stück des Randes haben.
Also ist die maximale Anzahl der Flächen 7.

c)
Durch Probieren erhält man maximal 10 Schnitte. (Einige Schüler sind sicherlich in der Lage, eine Lösungsformel zu entwickeln. Siehe Klasse 7/8)
Durch 10 Schnitte ergeben sich maximal 16 Gebiete. Dabei ist darauf zu achten, dass die Schnittpunkte im Inneren der Fläche von höchstens 2 Sehnen gebildet werden. Zieht man mehr Linien durch einen Punkt, verliert man Gebiete.



d)
Viele Schulen berechnen in Klasse fünf die Anzahl der Diagonalen in verschiedenartigen Vielecken. Daher ist dieser Ansatz sicherlich möglich.

$s_n = \frac{1}{2} \cdot \left[n(n-3) \right] + n$ (Die maximal mögliche Anzahl der Schnitte entspricht der Anzahl der Diagonalen plus der Anzahl der Seiten eines Siebenecks.)

$$s_n = \frac{1}{2} \cdot \left[n(n-3) \right] + n = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{1}{2}\left(n^2 - n\right) = \frac{1}{2} n(n-1)$$

Für sieben Randpunkte folgt daraus:

$$\frac{1}{2} n(n-1) = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$$

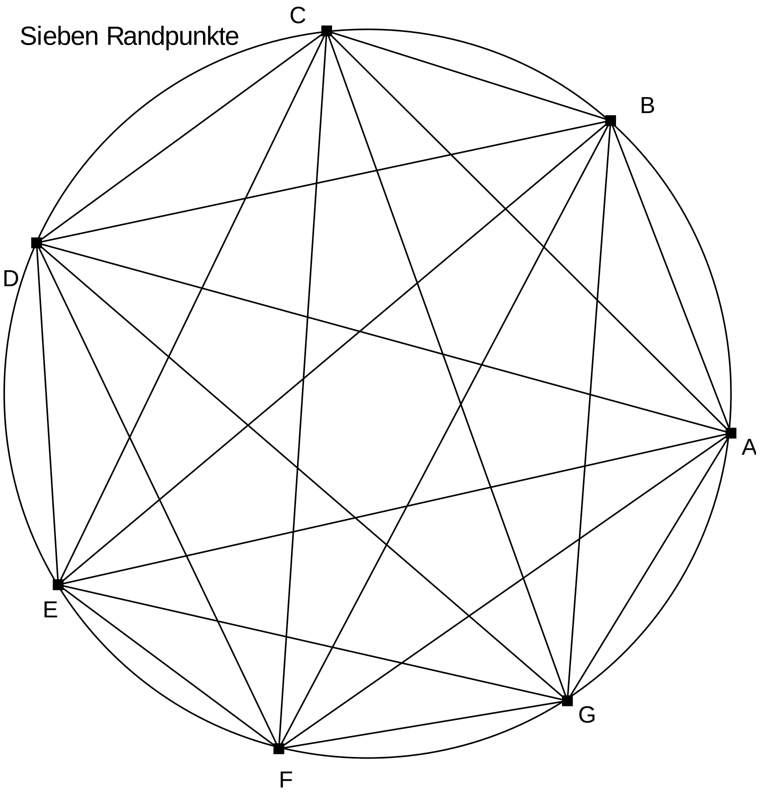
Es lassen sich 21 Schnitte ausführen.

Vielleicht wissen einige Schüler schon, dass auch

$\frac{1}{2} n(n-1) = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \binom{n}{2}$ entspricht.

Die Anzahl der Stücke (Gebiete) bei sieben Punkten beträgt 57.

Diese lassen sich durch Abzählen bestimmen.



e)
Man muss mindestens 6 Punkte markieren. Dabei dürfen sich höchsten zwei (2) Schnittlinien in einem Punkt (Innerer Punkt) treffen. Zieht man mehr Linien (Sehnen, Diagonalen) durch einen Punkt, verliert man Gebiete.

Die Lösung wird wahrscheinlich durch Abzählen erreicht.

Man wird in dieser Jahrgangsstufe nicht unbedingt erwarten können, dass die Schüler die Formel

$$Anzahl\ der\ Stücke = 1 + \binom{6}{2} + \binom{6}{4}$$

(Anzahl der Stücke = 1+ Anzahl der Sehnen + Anzahl der inneren Punkte) entwickeln und anwenden können.

f)
An jedem Sehnenschnittpunkt treffen sich zwei Sehnen. Diese haben vier Endpunkte.
Umgekehrt lässt sich formulieren, dass zu vier beliebigen Randpunkten genau ein Sehnenschnittpunkt (innerer Punkt) gehört, nämlich der Schnittpunkt der Diagonalen.
Von diesen Punkten gibt es genauso viele, wie sich aus allen Punkten (n) vier Punkte bestimmen lassen.

Das sind genau $\binom{n}{4} = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$

Die Anzahl der Sehnenschnittpunkte kann man auch durch Abzählen erhalten. Mit zunehmender Anzahl von Eckpunkten wird das natürlich immer schwieriger.

g)
Zu vier beliebigen Randpunkten eines Vielecks gehört genau ein Sehnenschnittpunkt, nämlich der Schnittpunkt der Diagonalen des Vierecks.
Von diesen Punkten gibt es genauso viele, wie sich vier Punkte aus n Punkten herausgreifen lassen.

Das sind genau: $\binom{n}{4} = \frac{n!}{4! \cdot (n-4)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{4!}$

Es handelt sich um eine ungeordnete Stichprobe vom Umfang 4 ohne Zurücklegen aus einer n-elementigen Gesamtheit.

Aufgabe 2 (Schach-Wettkampf):

a)
Sei X_1 die zufällige Anzahl der von A im ersten Wettkampf gewonnen Partien (das Ereignis A_1).

X_1 ist binomialverteilt mit den Parametern n = 4 und p = 0,6. Für die Wahrscheinlichkeit gilt dann:

$$P(X_1 > 2) = P(X_1 = 3) + P(X_1 = 4) = \binom{4}{3} 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^1 + \binom{4}{4} 0{,}6^4 \cdot 0{,}4^0$$

$$= 0{,}3456 + 0{,}1296 = 0{,}4752.$$

Sei X_2 die zufällige Anzahl der von A im zweiten Wettkampf gewonnen Partien (das Ereignis
A_2).
X_2 ist binomialverteilt mit den Parametern n = 4 und p = 0,6. Für die Wahrscheinlichkeit gilt dann:

$$P(X_1 > 3) = P(X_1 = 4) + P(X_1 = 5) + P(X_1 = 6) = \binom{6}{4} 0{,}6^4 \cdot 0{,}4^2 + \binom{6}{5} 0{,}6^5 \cdot 0{,}4^1 + \binom{6}{6} 0{,}6^6 \cdot 0{,}4^0$$

$$\approx 0{,}3110 + 0{,}1866 + 0{,}0470 = 0{,}5446.$$

Für das Ereignis A_3 welches sich aus den Ereignissen von A_1 und A_2 zusammensetzt, die auch unabhängig voneinander sind, gilt folgendes für die Wahrscheinlichkeit $P(A_3)$:

$$P(A_3) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0{,}4752 \cdot 0{,}5446 \approx 0{,}2588.$$

b) Sei X die zufällige Anzahl der von Arne insgesamt gewonnen Partien. X ist binomialverteilt mit den Parametern n = 10 und p = 0,6. Für die Wahrscheinlichkeit gilt dann:

$$P(X > 5) = P(X = 6) + ... + P(X = 10) = \sum_{k=6}^{10} \binom{10}{k} 0{,}6^k \cdot 0{,}4^{10-k} \approx 0{,}6331.$$

Aufgabe 3 (Zahlensummen):

Einige Proben scheinen die Bedingung und die Aussage zu bestätigen:
1+2+3+4+5+6+7= 28; 7 ist ungerade und teilt 28.
5+6+7+8= 26; 4 ist gerade und teilt nicht 26.
14+15+16= 45; 3 ist ungerade und teilt 45.
Es sei n die Anzahl der Summanden und s der kleinste Summand; dann gilt:

$$s + (s+1) + (s+2) + \cdots + (s+n-1)$$

$$s \cdot n + (1 + 2 + \cdots + (n-1))$$

$$s \cdot n + \sum_{i=1}^{n-1} i \ = \ s \cdot n + \frac{(n-1)\cdot n}{2} = n \cdot \left[s + \frac{1}{2}\,(n-1) \right]$$

Weil n ungerade ist, ist n-1 gerade und dadurch ist der Wert der eckigen Klammer eine natürliche Zahl. Damit ist die Aussage bewiesen.

Aufgabe 4 (Superschokohohlei)

Hierbei handelt es sich um unsere sog. Scherzaufgabe. Es gibt keine eindeutige Lösung. Die Bewertung erfolgt nach Kreativität im Lösungsansatz.

Hier nur einige mögliche Vorschläge:

Lisa gewinnt, wenn
u.a.
er das Ei im ersten Versuch zerschlägt
…

David gewinnt, wenn er
u.a.
das Ei mit seinem Taschenmesser mit drei Schnitten zerstört
…